Условия и решения задач

9 класс

9.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами? *(О. Подлипский)*

Ответ. 1250 сумм.

Решение. Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна, в таблице стоит хотя бы $x^2+(50-x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2+(50-x)^2 = 2x^2-100x+50^2 = 2(x-25)^2+2\cdot25^2 \geqslant 2\cdot25^2 = 1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500-1250=1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, \ldots, 25+\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $26, 27, \ldots, 49, 50, 26-\sqrt{2}, 27-\sqrt{2}, \ldots, 50-\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2\cdot25^2=1250$ сумм рационального и иррационального чисел.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказательство того, что рациональных чисел не более 1250 — 4 балла.

Если это доказательство проведено лишь в частном случае, когда вдоль левой (или верхней стороны) стоит равное количество рациональных и иррациональных чисел — за эту часть решения ставится 1 балл вместо четырёх.

Неравенство $x^2+(50-x)^2 \geqslant 1250$ (или эквивалентное) используется без доказательства — снимается 1 балл.

Верный пример, показывающий, что могло быть ровно 1250 рациональных чисел — 3 балла.

Утверждение, что сумма рационального и иррационального чисел иррациональна, можно использовать без доказательства.

9.6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$. *(Б. Обухов)*

Первое решение. Поскольку $\angle AHK = \angle AMK = 90^\circ$, точки A, H, M и K лежат на окружности ω с диаметром AK (см. рис. 1). По условию, хорда HM этой окружности стягивает угол $\angle MAH = 30^\circ$, поэтому $HM = 2R\sin30^\circ = AK/2$. С другой стороны, HM — медиана в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому $BC = 2HM = AK$, что и требовалось доказать.

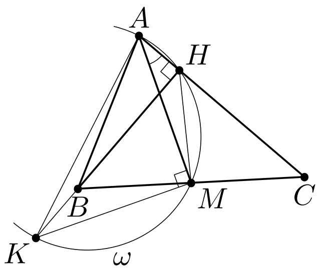

Рис. 1

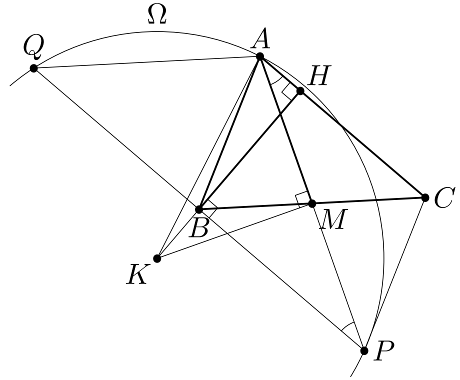

Рис. 2

Второе решение. Достроим треугольник ABC до параллелограммов $ABPC$ и $AQBC$ (см. рис. 2); тогда $BP = AC = BQ$ и $KH \perp PQ$. Кроме того, точка M — середина AP (как точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABPC$). Значит, прямые MK и HK — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и PQ. Следовательно, точка K — центр окружности Ω, описанной около треугольника APQ. Далее, $\angle APQ = \angle PAC = 30^\circ$, поэтому хорда AQ окружности Ω равна радиусу AK. Наконец, из параллелограмма $AQBC$ получаем $BC = AQ = AK$.

Комментарий. Замечено, что точки A, H, M и K лежат на одной окружности — 2 балла.

9.7. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны. (*А. Грибалко*)

Решение. Докажем *утверждение задачи* индукцией по количеству n сторон многоугольника. База индукции $n = 3$ очевидна. Теперь выведем *утверждение* для k-угольника ($k \geqslant 4$), предполагая, что оно верно для многоугольников с количеством сторон меньшим, чем k.

Итак, пусть выпуклый k-угольник P разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Рассмотрим одну из этих диагоналей, назовем её d. Диагональ d делит P на два многоугольника P_1 и P_2. У каждого из многоугольников P_1 и P_2 количество сторон меньше k, и каждый из них разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. По нашему предположению, в многоугольнике P_1 имеются равные стороны a_1 и b_1. Если ни a_1, ни b_1 не совпадает с d, то a_1 и b_1 — стороны P, и наше *утверждение* доказано.

Иначе пусть, например, b_1 совпадает с d. Аналогично, в многоугольнике P_2 найдутся равные стороны a_2 и b_2, и если ни a_2, ни b_2 не совпадает с d, то *утверждение* доказано. Наконец, пусть, например, b_2 совпадает с d. Но тогда a_1 и a_2 — различные стороны многоугольника P, каждая из которых равна d, то есть a_1 и a_2 — требуемая пара сторон.

Комментарий. За доказательство утверждения задачи только в некоторых частных случаях разбиений баллы не начисляются.

За доказательство утверждения задачи для некоторых небольших значений k (количества сторон) баллы не начисляются.

Возможен и другой вариант индукционного рассуждения, в котором используется факт о том, что в данном разрезании (триангуляции) найдется диагональ, делящая выпуклый

n-угольник на треугольник и $(n-1)$-угольник. Если в верном решении этот факт используется без доказательства — баллы за это не снимаются. Если же попытки доказательства этого факта не приводят к успеху — снимается 1 балл.

9.8. Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала. (*И. Богданов*)

Решение. Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечётных, то среди произведений троек чисел ровно C_k^3 нечётных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечётным ровно тогда, когда C_k^3 нечётно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1).

Заметим, что число $C_{43}^3 = \dfrac{43 \cdot 42 \cdot 41}{6}$ нечётно, а число $C_{44}^3 = \dfrac{44}{41} \cdot C_{43}^3$ чётно. Значит, в первую минуту добавится нечётное число, а дальше будут добавляться только чётные. Итак, после первой минуты среди чисел на карточках всегда будет ровно 44 нечётных.

Рассмотрим числа на карточках после n минут. Пусть T_n — сумма всех произведений троек этих чисел, а D_n — сумма всех произведений пар этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений троек чисел, среди которых есть только что добавленное, то есть прибавлением D_nT_n; итак, $T_{n+1} = T_n + D_nT_n = T_n(1 + D_n)$. Заметим при этом, что $D_n \equiv C_{44}^2 = 22 \cdot 43 \equiv 0 \pmod 2$ при $n \geqslant 1$. Значит, при $n \geqslant 1$ число $1 + D_n$ нечётно, и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Итак, после первой минуты степень двойки, на которую делится добавляемое число T_n, всегда равна степени двойки, на которую делится T_1. Значит, если бы после второй минуты на карточках не было числа, делящегося на 2^{10000}, то и впоследствии такого числа бы не появилось. Отсюда и следует требуемое.

Комментарий. Доказано, что, начиная со второй минуты, на добавляемых карточках появляются только чётные числа — 2 балла.