10 класс

10.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

Ответ. 1250 произведений.

Решение. Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50 - x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально, в таблице стоит хотя бы $x^2 + (50 - x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 50^2 = 2(x - 25)^2 + 2 \cdot 25^2 \geqslant \geqslant 2 \cdot 25^2 = 1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500 - 1250 = 1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, 25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $26, 27, \ldots, 49, 50, 26\sqrt{2}, 27\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2 \cdot 25^2 = 1250$ произведений рационального и иррационального чисел.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказательство того, что рациональных чисел не более 1250 — 4 балла.

Если доказательство проведено лишь в частном случае, когда вдоль левой (или верхней стороны) стоит равное количество рациональных и иррациональных чисел — за эту часть решения ставится 2 балла вместо 4.

Неравенство $x^2 + (50 - x)^2 \geqslant 1250$ (или эквивалентное) используется без доказательства — снимается 1 балл.

Верный пример, показывающий, что могло быть ровно 1250 рациональных чисел — 3 балла.

Утверждение, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел иррационально, можно использовать без доказательства.

10.6. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2+2^2+2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей. (*И. Богданов, П. Кожевников*)

Решение. Пусть $S_1, \ldots, S_{100}$ — числа, которые были записаны на доске в первые 100 минут. Пусть перед дописыванием числа S_i на доске были числа $a_1, \ldots, a_k$. Тогда $S_i = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$, а следующее дописанное число есть $S_{i+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + S_i^2 = S_i + S_i^2$.

Итак, $S_{i+1} = S_i(S_i+1)$. Значит, S_{i+1} содержит в своем разложении на простые множители все простые числа, на которые делится S_i; кроме того, поскольку S_i и S_i+1 взаимно просты, S_{i+1} содержит хотя бы один новый простой множитель (делитель числа $1+S_i$). Так как $S_1 > 1$, то S_1 содержит в своем разложении хотя бы один простой множитель. Отсюда последовательно получаем, что для $i = 1, 2, \ldots, 100$ число S_i содержит в своем разложении хотя бы i различных простых множителей. При $i = 100$ это дает решение задачи.

Комментарий. В обозначениях решения выше доказано, что $S_{i+1} = S_i + S_i^2$ — 4 балла.

Если в верном решении после получения равенства $S_{i+1} = S_i(S_i+1)$ делается вывод о появлении нового простого множителя без ссылки на взаимную простоту чисел S_i и S_i+1 — снимается 1 балл.

10.7. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны. (*А. Грибалко*)

Решение. Докажем *утверждение задачи* индукцией по количеству n сторон многоугольника. База индукции $n = 3$ очевидна. Теперь выведем *утверждение* для k-угольника ($k \geqslant 4$), предполагая, что оно верно для многоугольников с количеством сторон меньшим, чем k.

Итак, пусть выпуклый k-угольник P разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Рассмотрим одну из этих диагоналей, назовем её d. Диагональ d делит P на два многоугольника P_1 и P_2. У каждого из многоугольников P_1 и P_2 количество сторон меньше k, и каждый из них разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. По нашему предположению, в многоугольнике P_1 имеются равные стороны a_1 и b_1. Если ни a_1, ни b_1 не совпадает с d, то a_1 и b_1 — стороны P, и наше *утверждение* доказано.

Иначе пусть, например, b_1 совпадает с d. Аналогично, в многоугольнике P_2 найдутся равные стороны a_2 и b_2, и если ни a_2, ни b_2 не совпадает с d, то *утверждение* доказано. Наконец, пусть, например, b_2 совпадает с d. Но тогда a_1 и a_2 — различные стороны многоугольника P, каждая из которых равна d, то есть a_1 и a_2 — требуемая пара сторон.

Комментарий. За доказательство утверждения задачи только в некоторых частных случаях разбиений баллы не начисляются.

За доказательство утверждения задачи для некоторых небольших значений k (количества сторон) баллы не начисляются.

Возможен и другой вариант индукционного рассуждения, в котором используется факт о том, что в данном разрезании (триангуляции) найдется диагональ, делящая выпуклый n-угольник на треугольник и $(n-1)$-угольник. Если в верном решении этот факт используется без доказательства — баллы за это не снимаются. Если же попытки доказательства этого факта не приводят к успеху — снимается 1 балл.

10.8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Так как четырёхугольник $ABCQ$ вписан и $AC \parallel DE$, имеем $\angle BEX = \angle BCA = \angle BQA = \angle BQX$. Следовательно, четырёхугольник $XBEQ$ вписан, откуда $\angle XBQ = \angle XEQ = \angle DEQ$. Аналогично, четырёхугольник $YBDP$ вписан, и $\angle PBY = \angle PDE$. По условию, $PD \parallel EQ$. Значит, $180^\circ = \angle PDE + \angle DEQ = \angle XBQ + \angle PBY$.

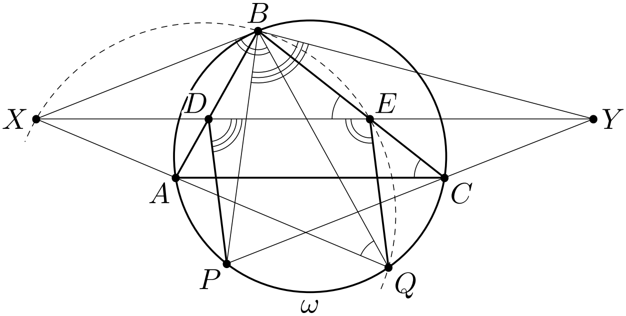

Рис. 3

Таким образом, $\angle XBY + \angle PBQ = \angle XBP + 2\angle PBQ + \angle QBY = \angle XBQ + \angle PBY = 180^\circ$.

Комментарий. Показано только, что точки X, B, E, Q (или Y, B, D, P) лежат на одной окружности — 3 балла.