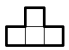
9 класс

Первый день

9.1. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.)

9.2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

9.3. Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N?

9.4. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырёхклеточную фигурку вида  — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)

XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников

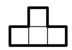
9 класс

Первый день

9.1. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.)

9.2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

9.3. Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N?

9.4. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырёхклеточную фигурку вида  — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)