9 класс

9.1. В круговом шахматном турнире участвовало шесть человек: два мальчика и четыре девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки? (*В круговом шахматном турнире каждый игрок играет с каждым по одной партии. За победу дается* 1 *очко, за ничью* 0,5, *за поражение* — 0).

Ответ: нет, не могли.

Решение. В круговом турнире из шести участников разыгрывается $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ очков, причем каждый участник может набрать не более пяти очков. Если бы мальчики набрали в два раза больше очков, чем девочки, то они набрали 10 очков на двоих, то есть по 5 очков каждый. Но тогда оба должны были выиграть все партии, что невозможно (в личной встрече кто-то из них должен потерять очки).

Утверждение задачи верно и в более общей формулировке: в турнире $3n$ *участников, из которых* n *мальчиков и* $2n$ *девочек.*

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.2. Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трехчленов $x^2 + bx + c$ и $x^2 + ax + d$ известно, что $0 < a < b < c < d$. Могут ли эти трехчлены иметь общий корень?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Поскольку коэффициенты обоих трехчленов положительны, то их корни не могут быть положительными (это можно получить из теоремы Виета или непосредственной подстановкой).

Пусть x_0 — общий корень этих трехчленов. Тогда $x_0^2 + bx_0 + c = 0$ и $x_0^2 + ax_0 + d = 0$, следовательно, $x_0^2 + bx_0 + c = x_0^2 + ax_0 + d$. Преобразовав это равенство, получим, что $x_0(b - a) = d - c$. Из условия задачи следует, что $d - c > 0$ и $b - a > 0$, то есть, $x_0 > 0$, противоречие.

Отметим, что условие положительности коэффициентов является существенным. Например, трехчлены: $x^2 - 4x + 3$ *и* $x^2 - 5x + 4$ *имеют общий корень* 1, *при этом* $-5 < -4 < 3 < 4$.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что если есть общий корень, то он положительный (см. вторую часть решения), иными словами, никак не использовано, что коэффициенты больше нуля*

$-$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.3. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM — в точке Q. Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC.

Ответ: $AC = 11$.

Решение. *Первый способ.* Проведем через точку Q прямую, параллельную BC (N и L — точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC соответственно, см. рис. 9.3а). Поскольку AM — медиана треугольника ABC, то $LQ = NQ$, кроме того, $PT \parallel AC$, то есть, PQ — средняя линия в треугольнике ANL. Тогда $AL = 2PQ = 6$. Кроме того, $QL \parallel TC$ и $QT \parallel LC$, следовательно, $LQTC$ — параллелограмм, откуда $LC = QT = 5$. Таким образом, $AC = AL + LC = 6 + 5 = 11$.

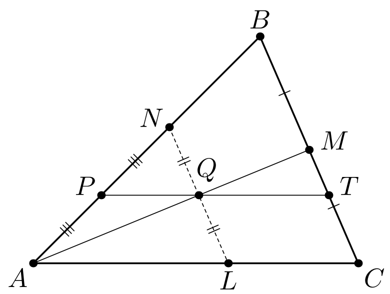

Рис. 9.3а

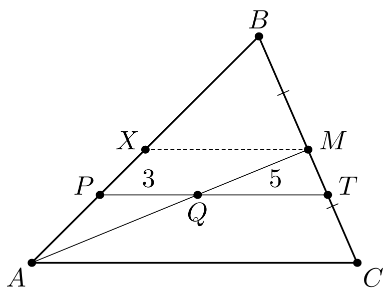

Рис. 9.3б

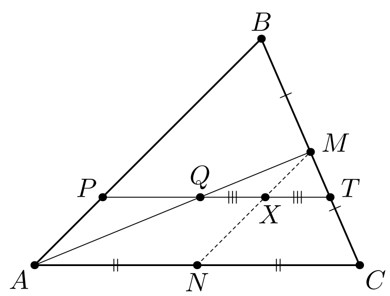

Рис. 9.3в

Второй способ. Проведем среднюю линию XM в треугольнике ABC (см. рис. 9.3б). Тогда $XM \parallel PT \parallel AC$, следовательно, $\Delta APQ \sim \Delta AXM$ и $\Delta QMT \sim \Delta AMC$, откуда следует, что $\frac{PQ}{XM} = \frac{AQ}{AM}$ и $\frac{QT}{AC} = \frac{QM}{AM}$, то есть, $\frac{PQ}{XM} + \frac{QT}{AC} = 1$. Подставляя значения из условия задачи и учитывая, что $AC = 2MX$, получим $\frac{6}{AC} + \frac{5}{AC} = 1$, откуда $AC = 11$.

Третий способ. Проведем среднюю линию MN в треугольнике ABC (см. рис. 9.3в). Поскольку $QT \parallel AC$, то QT делится отрезком MN пополам. Из подобия треугольников APQ и MXQ получим, что $\frac{AQ}{QM} = \frac{3}{2{,}5} = \frac{6}{5}$. Тогда $\frac{MQ}{AM} = \frac{5}{11}$, откуда $\frac{QT}{AC} = \frac{5}{11}$, то есть $AC = 11$.

Четвертый способ. Запишем теорему Менелая для треугольника BPT и прямой AM: $\frac{PQ}{QT} \cdot \frac{TM}{MB} \cdot \frac{BA}{AP} = 1$. Пусть $BP = x$, $AP = y$. Тогда $\frac{BT}{TC} = \frac{x}{y}$ и $\frac{TM}{MB} = \left(\frac{x+y}{2} - y\right) : \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{x+y}$. Таким образом, $\frac{3}{5} \cdot \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x+y}{y} = 1$, откуда $\frac{x-y}{y} = \frac{5}{3}$, то есть, $\frac{x}{y} = \frac{8}{3}$. Поскольку $\frac{PT}{AC} = \frac{x}{x+y}$, то $AC = 11$.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, в котором допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *задача не решена, но есть верная идея дополнительного построения*

$-$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

$-$ *рассмотрен частный случай (например, задача решена для равнобедренного треугольника)*

9.4. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

Ответ: 91.

Решение. *Пример.* Рассмотрим девять чисел, равных 91, и число 182. Их сумма равна 1001.

Оценка. Докажем, что значение, большее 91, НОД принимать не может. Заметим, что $1001 = 7 \times 11 \cdot 13$. Так как каждое слагаемое в данной сумме делится на НОД, то НОД является делителем числа 1001. С другой стороны, меньшее слагаемое в сумме (а значит и НОД) не больше, чем 101. Осталось заметить, что 91 — наибольший из делителей числа 1001, удовлетворяющий этому условию.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ, доказана оценка, но не приведен пример*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример десяти чисел*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.5. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно, так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

Решение. *Первый способ.* Поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BAC = \angle BDC$ (см. рис. 9.5). Тогда в равнобедренных треугольниках ABK и DLC равны и углы при основаниях, следовательно, $\angle BLC = \angle BKC$, то есть, четырехугольник $BCKL$ — вписанный. Таким образом, $\angle KLO = \angle BCO = \angle BDA$, то есть, $KL \parallel AD$.

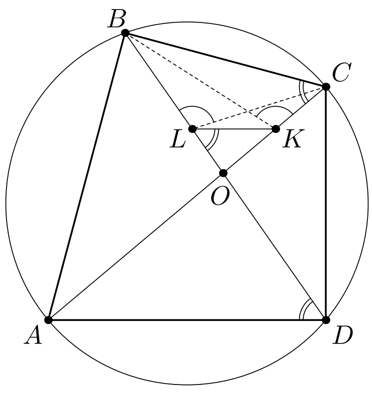

Рис. 9.5

Второй способ. Из условия и подобия треугольников AOB и DOC, получим, что $\frac{AO}{DO} = \frac{AB}{DC} = \frac{AK}{DL}$, откуда $\frac{AK}{AO} = \frac{DL}{DO}$. Следовательно, $\frac{OK}{AO} = \frac{OL}{DO}$, значит, треугольники AOD и KOL подобны. Тогда $\angle KLO = \angle ADO$, то есть, $KL \parallel AD$.

Критерии проверки:

+ полное обоснованное решение

∓ доказано только, что четырехугольник BCKL — вписанный

− задача не решена или решена неверно

− рассмотрен только частный случай

9.6. Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать. (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Ответ: могли вырезать любой из девяти квадратов, закрашенных на рисунке 9.6в.

Решение. Раскрасим шахматную доску в три цвета по диагоналям, начиная с левого нижнего угла доски (см. рис. 9.6а). Тогда при разрезании части доски на прямоугольники 1×3 в каждом прямоугольнике окажутся клетки всех трех цветов. Следовательно, после вырезания квадрата клеток каждого из цветов на доске должно остаться поровну. До вырезания на доске 21 клетка цвета 1, 22 клетки цвета 2 и 21 клетка цвета 3.

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Рис. 9.6а

3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1

Рис. 9.6б

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Рис. 9.6в

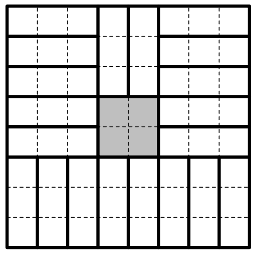

Рис. 9.6г

Следовательно, вырезали квадрат, в котором две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов много. Однако, заметим, что мы можем раскрасить доску еще тремя аналогичными способами — начиная с правого нижнего угла доски, с правого верхнего или с левого верхнего (пример раскраски, начинающейся с правого нижнего угла, см. на рис. 9.6б). При каждом способе раскраски количество клеток каждого цвета остается неизменным.

Следовательно, могли быть вырезаны только те квадраты, которые при любом способе раскраски содержат две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов 9, см. рис. 9.6в.

Покажем, как разрезать оставшуюся доску для каждого из девяти случаев. Заметим, что вырезанный квадрат находится в одном из угловых квадратов 5×5, см. рис. 9.6в. То есть, достаточно показать, как разрезать на прямоугольники 1×3 квадрат 5×5 без одного из угловых квадратов 2×2 и оставшуюся часть доски. Это показано на рис. 9.6г.

Критерии проверки:

+ полное обоснованное решение

± приведены верный ответ, показано, что другие квадраты не могли быть вырезаны, но не объяснено, как именно проводится разрезание

∓ приведен только верный ответ или ответ с указанием, как разрезать оставшуюся часть доски

∓ присутствует верная идея раскраски, но допущена ошибка в ответе или решение не доведено до конца

− задача не решена или решена неверно